Übung 8

Frequency

Benötigt: -

Aufgabe 1: Theorie zur Ermittlung des Frequenzgangs eines dynamischen Systems

Grundlage der Frequenzganganalyse ist die Anregung eines linearen Systems an seinem Eingang mit einer Sinusschwingung bekannter Amplitude X_{eo} und Frequenz ω.

$$\boxed{x_e(t) = X_{eo} \cdot \sin(\omega \cdot t)}$$

Dann erhalten wir nach einer Übergangszeit (Transition) am Ausgang die Reaktion des Systems mit einer Sinusschwingung gleicher Frequenz, aber unterschiedlicher Amplitude X_{ao} und mit einer Phasenverschiebung φ gegenüber dem Eingang.

$$x_a(t) = X_{ao} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$$

Führen wir die Frequenz-abhängige Verstärkung des Systems mit

$$A(\omega) = \frac{X_{ao}}{X_{eo}}$$

ein und berücksichtigen zudem die Frequenzabhängigkeit der Phasenverschiebung, so lässt sich die Systemreaktion durch

$$\boxed{x_a(t) = A(\omega) \cdot X_{eo} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi(\omega))}$$

beschreiben.

Zur Ermittlung der beiden interessierenden Größen (Verstärkung, Phasenverschiebung) verwendet man einen Trick, den wir kurz mathematisch beschreiben wollen. Hintergrund sind dabei die beiden Regeln der Trigonometrie:

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) - \cos(x+y)\right) = \frac{1}{2}\left(\cos(y-x) - \cos(x+y)\right)$$

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\left(\sin(x-y) + \sin(x+y)\right)$$

Multiplizieren wir nun das normierte Eingangssignal mit dem normierten Ausgangssignal, so erhalten wir

$$r(t) = \frac{x_e(t)}{X_{eo}} \cdot \frac{x_a(t)}{X_{eo}} = \sin(\omega t) \cdot A(\omega) \sin(\omega t + \varphi(\omega))$$
$$= \frac{1}{2} A(\omega)\left[\cos(\varphi(\omega)) - \cos(2\omega t + \varphi(\omega))\right]$$

Man erkennt leicht, dass der zweite Term im Vergleich zum Ersten eine Mittelwert-freie Schwingung mit doppelter Frequenz darstellt. Um nun diesen zu eliminieren, führen wir folgendes Integral über ganze Vielfache der Periodendauer der doppelten Frequenz ein und erhalten

$$R(\omega) = \frac{1}{n \cdot \pi / \omega} \int_0^{n \cdot \pi / \omega} r(t)\, dt = \frac{1}{2} \cdot A(\omega) \cdot \cos(\varphi(\omega))$$

Machen wir nochmals den gleichen Ansatz mit einer „Cosinus"-Schwingung

$$\tilde{x}_e(t) = X_{eo} \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad ,$$

so erhalten wir für

$$i(t) = \frac{\tilde{x}_e(t)}{X_{eo}} \cdot \frac{x_a(t)}{X_{eo}} = \cos(\omega t) \cdot A(\omega)\sin(\omega t + \varphi(\omega))$$

$$= \frac{1}{2} A(\omega)\left[\sin(\varphi(\omega)) + \sin(2\omega t + \varphi(\omega))\right]$$

und das Integral

$$I(\omega) = \frac{1}{n \cdot \pi/\omega} \int_0^{n \cdot \pi/\omega} i(t)\, dt = \frac{1}{2} \cdot A(\omega) \cdot \sin(\varphi(\omega))$$

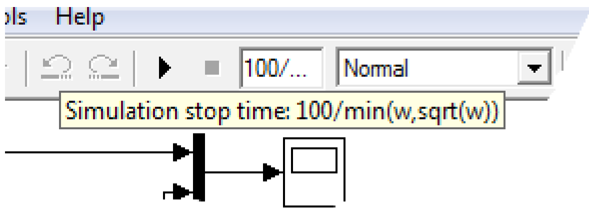
Aus den beiden Integral-werten lassen sich nun die beiden interessierenden Größen für die eine Frequenz wie folgt ermitteln:

$$\boxed{\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{I(\omega)}{R(\omega)}\right)}$$

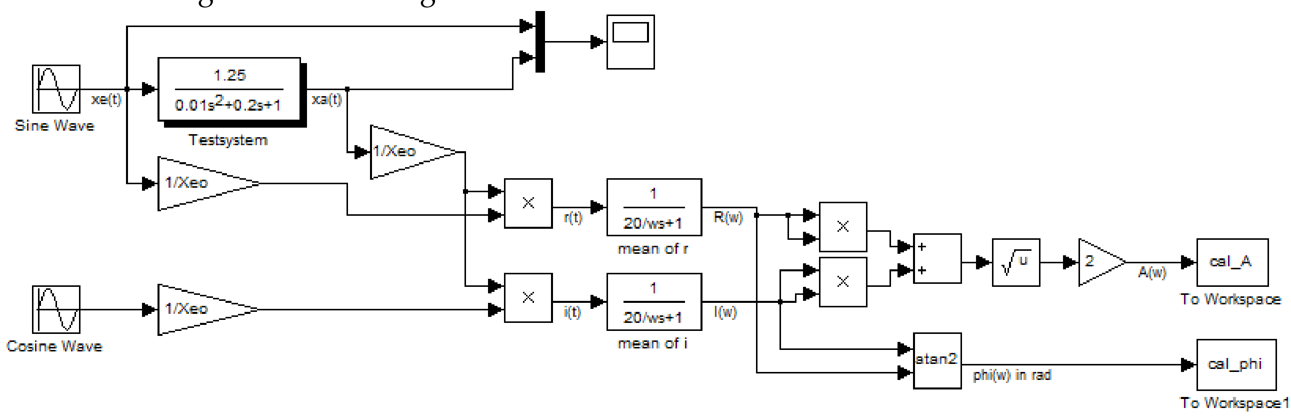
$$\boxed{A(\omega) = 2 \cdot \sqrt{R(\omega)^2 + I(\omega)^2}}$$

Aufgabe 2: Modell zur Frequenzgang-Aufnahme

- öffne neues Modell „frequency_sampler.mdl"
- wähle in Menü: Simulation->Configuration Parameters->Solver „ode23" aus
- wähle in Menü: Simulation->Configuration Parameters->Diagnostics unter „Automatic solver parameter selection" die Option „none"
- setze die richtige Simulationszeit ein



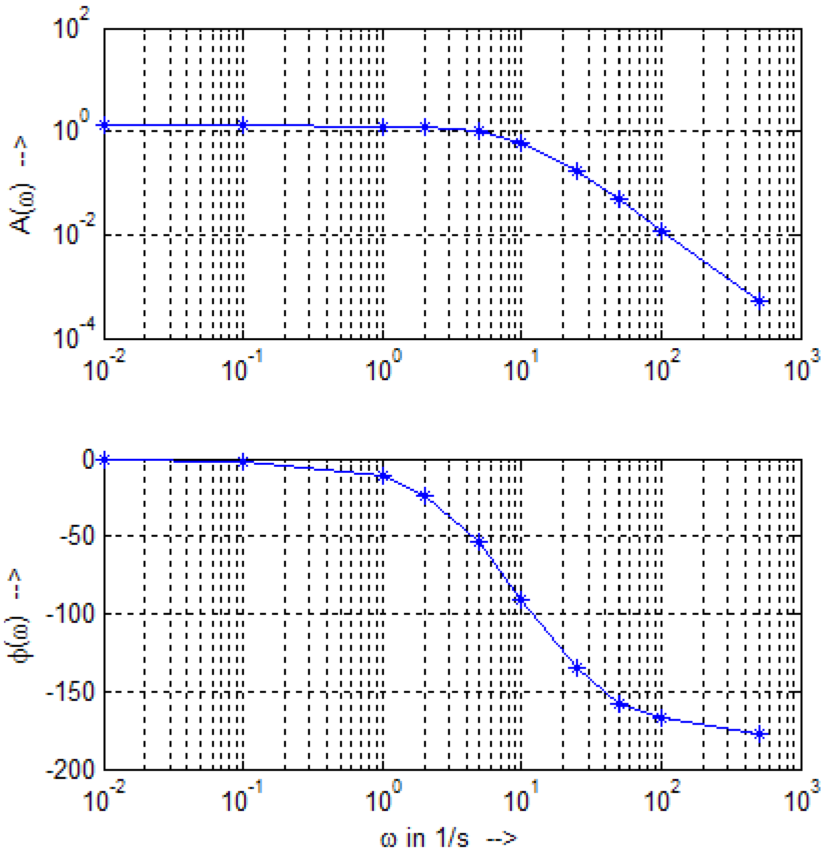
- erstelle das Modell entsprechend nachfolgender Abbildung



- setzen sie im Command-Window w=1 und Xeo=0.4 und lasse die Simulation zum Testen laufen
- mit dem Scope-Block kann der Verlauf am Ein- und Ausgangs des zu untersuchenden Systems für diesen Frequenzfall dargestellt werden

Aufgabe 3: Durchführung und Darstellung des Frequenzgangs

- öffne neues Skript „Frequency.m"
- für die Frequenzen w = 0.01, 0.1, 1, 2, 5, 10, 25, 50, 100 und 500 1/s simuliere man das Modell mit Xeo=0.4 über den Aufruf: **`sim('frequency_sampler')`**
- die Ergebnisse für das Amplitudenverhältnis „cal_A" und „cal_phi" speichere man ab und erstelle das Bodediagramm für den Frequenzgang der Versuchsläufe



- erstelle ein weiteres Diagramm mit der Ortskurvendarstellung für den Frequenzgang