Übung 10

Regression Teil B

Benötigt: -
Befehle: diff, A\b

Aufgabe 1: Wärmeausdehnung von Stahl

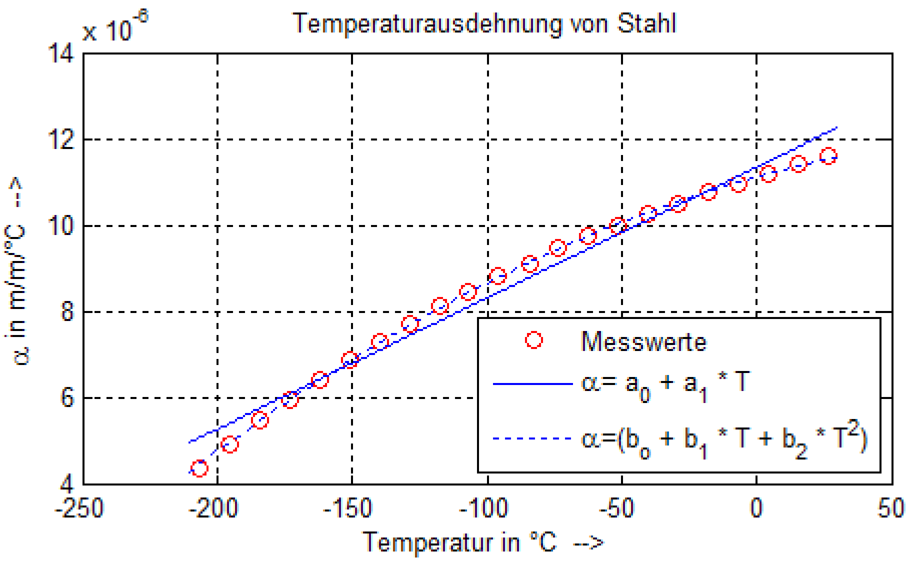
Es geht darum, das Verhalten einer Stahlachse beim Abkühlen zu beschreiben, um eine sichere Presspassung zu gewährleisten. Die Frage ist dabei von entscheidender Bedeutung, mit welchem Kältemittel (Eis, Kunsteis, flüssiger Stickstoff) zu arbeiten ist.

T in °C	26.7	15.6	4.4	-6.7	-17.8	-28.9	-40	-51.1
α in $\mu m/m/°C$	11.65	11.45	11.23	11.02	10.8	10.55	10.3	10.04

T in °C	-62.2	-73.3	-84.4	-95.6	-106.7	-117.8	-128.9	-140
α in $\mu m/m/°C$	9.77	9.5	9.16	8.84	8.5	8.14	7.74	7.34

T in °C	-151.1	-162.2	-173.3	-184.4	-195.6	-206.7		
α in $\mu m/m/°C$	6.89	6.44	5.99	5.53	4.97	4.41		

- öffne neues Skript „stahl.m“
- erstelle ein Diagramm α in $m/m/°C = f(T \text{ in } °C)$ mit den Messwerten als rote Kreissymbole
- ermittle durch Regression die Koeffizienten einer Gerade, die den Zusammenhang der Messwerte möglichst gut beschreibt
- mit den ermittelten Koeffizienten berechne man die Funktionswerte y der Gerade für x-Werte im Bereich (-210°C … 30°C) und stelle diese als durchgezogene Kurve in dem bereits vorhandenen Diagramm dar
- ermittle durch Regression die Koeffizienten eines Polynoms 2. Ordnung, die den Zusammenhang der Messwerte möglichst gut beschreibt
- mit den ermittelten Koeffizienten berechne man die Funktionswerte y des Polynoms für x-Werte im Bereich (-210°C … 30°C) und stelle diese als punktierte Kurve in dem bereits vorhandenen Diagramm dar
- neben ordentlichen Achsenbeschriftungen ist ein passende Diagrammtitel anzugeben
- für die Legende gebe man einmal „Messwerte“ an und für die beiden anderen Kurven die zugrunde liegende Struktur für die Regression



Aufgabe 2: Prädiktion des Gärungsabbruchs

Im Verlauf einer alkoholischen Gärung wird Zucker mittels Hefebakterien in Alkohol umgewandelt, d.h. der Alkoholgehalt steigt im Verlauf der Gärung an und nähert sich einer Sättigung, wenn nahezu alles umgesetzt ist. Dieser Vorgang kann zwischen 3 und 8 Wochen dauern, je nach Fruchtmaische, Hefesorte und den Umgebungsbedingungen. Gegeben ist ein Gärverlauf über 15 Tage mit den jeweiligen Messergebnissen für den Alkoholgehalt. Ziel ist es, aus Planungsgründen abzuschätzen, wann der Alkoholgehalt den gewünschten Wert von 12% erreicht, um dann den Gärvorgang geeignet zu stoppen.

Gärdauer in Tagen	2	4	6	8	10	12	13	14	15
Alkohol in %	2.4	4.3	5.9	7.2	8.2	9.1	9.5	9.8	10.1

- öffne ein neues Skript „gaerung.m“
- erstelle ein Diagramm Alkoholgehalt in % als Funktion der Gaerungsdauer in Tagen mit den Messwerten als rote Kreissymbole und sehe weitere Darstellungen vor
- definiere die Bereiche für den Alkoholgehalt mit [0 … 15%] und für die Gärungsdauer mit [0 … 50 Tage] fest und zeichne eine (gestrichelt, grün) Linie auf Höhe der 12% ein
- ermittle durch Regression die Koeffizienten einer Gerade, die den Zusammenhang der Messwerte möglichst gut beschreibt
- mit den ermittelten Koeffizienten berechne man die Funktionswerte der Gerade und stelle diese für die ersten 20 Tage dar (punktiert, blau)
- bestimme den Zeitpunkt T1, bei dem die Gerade die 12%-Linie schneidet und gebe diesen aus

```
Gaerabbruch nach 16.7163 Tagen    (lineare Regression)
```

Aufgabe 3: Abbruchschätzung 2. und 3. Ordnung

- erweitere das Skript „gaerung.m“ um eine Polynom-Regression 2. Ordnung
- mit den ermittelten Koeffizienten berechne man die Funktionswerte des Polynoms und stelle diese für die ersten 30 Tage dar (gestrichelt, blau)
- bestimme den Zeitpunkt T2, bei dem die Kurve die 12%-Linie schneidet und gebe diesen aus

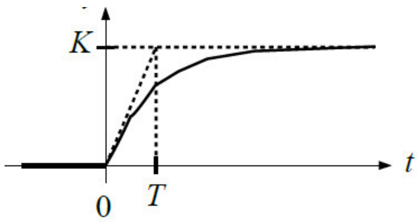
```
Gaerabbruch nach -.-     Tagen   (quadratische Regression)
```

- ermittle durch Regression die Koeffizienten eines Polynoms 3. Ordnung
- mit den ermittelten Koeffizienten berechne man die Funktionswerte und stelle diese für die ersten 30 Tage dar (gestrichelt, magenta)
- bestimme den Zeitpunkt T3, bei dem die Gerade die 12%-Linie schneidet und gebe diesen aus

```
Gaerabbruch nach 21.1347 Tagen   (qubische Regression)
```

Aufgabe 4: Verbesserte Abbruchschätzung

Die bisherigen Ansätze über Polynome können das erwartete Verhalten einer Sättigung nicht beschreiben, d.h. wir benötigen einen anderen Funktionsansatz.
Aus der Elektrotechnik ist ein Sättigungsverlauf beim Aufladen eines Kondensators bekannt, der durch eine DGL 1. Ordnung



$$T \cdot \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = K \quad (1)$$

beschrieben wird. Hierin gibt K den Anstieg (konstante Ladespannung), T die Zeitkonstante (R * C) und y(t) die Kondensatorspannung wieder. Die Lösung ergibt sich zu

$$y(t) = K \cdot \left(1 - e^{-t/T}\right) \quad (2)$$

Für unser Beispiel wäre y(t) die Alkoholkonzentration und K der Sättigungswert.
Das Problem ist mit diesem Ansatz, dass eine Regression damit zu einem nichtlinearen Gleichungssystem führen würde und auch der Trick über eine Logarithmierung scheitert an der Summe auf der rechten Seite. Daher gehen wir einen Näherungsweg, indem wir die DGL approximieren. Hierzu nähern wir die 1. Ableitung durch einen Differenzenquotienten (Sekantensteigung) an und erhalten für zwei benachbahrte Zeitpunkte

$$T \cdot \frac{y(t_2) - y(t_1)}{t_2 - t_1} + y(t_2) = K \quad ,$$

und umgeformt

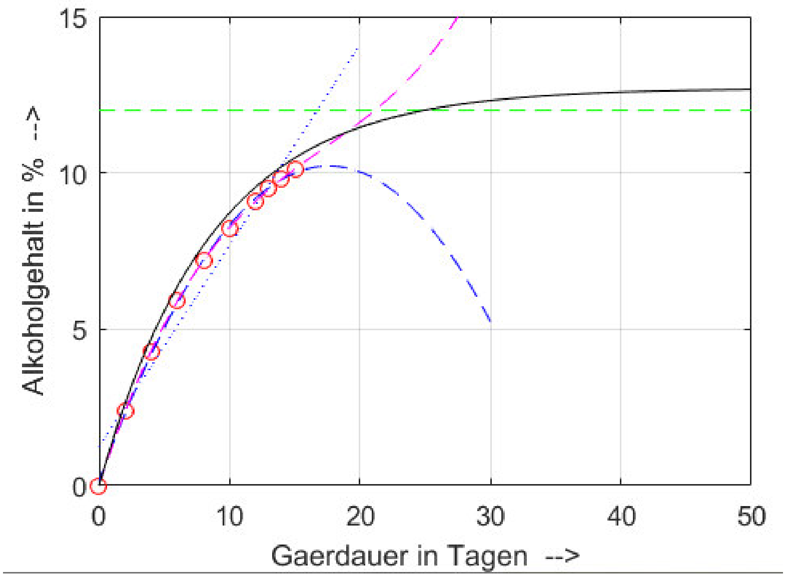
$$T \cdot \frac{y(t_2) - y(t_1)}{t_2 - t_1} - K = -y(t_2) \quad (3)$$

Schreiben wir dies nun für mehrere Zeitpunkte auf, so erhalten wir ein nunmehr lineares, überbestimmtes Gleichungssystem zur Ermittlung der beiden Unbekannten K und T.

$$\begin{bmatrix} \frac{y(t_2)-y(t_1)}{t_2-t_1} & -1 \\ \frac{y(t_3)-y(t_2)}{t_3-t_2} & -1 \\ \vdots & \vdots \\ \frac{y(t_N)-y(t_{N-1})}{t_N-t_{N-1}} & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T \\ K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y(t_2) \\ -y(t_3) \\ \vdots \\ -y(t_N) \end{bmatrix} \quad (4)$$

- erweitere das Skript „gaerung.m“, idem man das Gleichungssystem (4) der Form
  $A \cdot p = b$ ermittelt und anschließend per p = A\b regressiv löst
- Hierzu erzeuge man mit den N Stützwerten des Alkoholgehalts und den zeitpunkten die Matrix A und den Spaltenvektor der rechten Seite b
- nach Lösung erhält man aus p(1) die Zeitkonstannte T und aus p(2) die Verstärkung K
- mit den ermittelten Koeffizienten berechne man die Funktionswerte für die ersten 50 Tage mit Gleichung (2) und stelle diesen Verlauf dar (durchgezogen, schwarz)
- bestimme den Zeitpunkt Tabb, bei dem die Kurve die 12%-Linie schneidet und gebe diesen als geschätzten Abbruchzeitpunkt aus
- der mögliche Alkoholgehalt nach vollständiger Gärung kann mit K angegeben werden

```
Gaerabbruch nach 24.9 Tagen    (DGL-Regression)
Der mögliche End-Alkoholgehalt betrüge 12.7028 %
```



Chapter 05.00G

Physical Problem of Interpolation Mechanical Engineering

Problem Statement

To make the fulcrum (Figure 1) of a bascule bridge, a long hollow steel shaft called the trunnion is shrink fit into a steel hub.

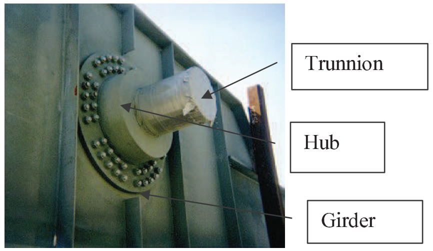
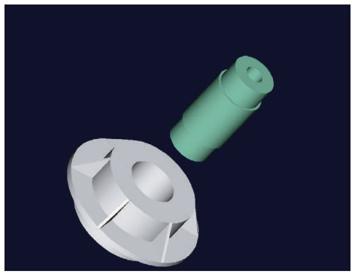


Figure 1 Trunnion-Hub-Girder (THG) assembly.

This is done by first immersing the trunnion in a cold medium such as dry-ice/alcohol mixture. After the trunnion reaches a steady state temperature of the cold medium, the trunnion outer diameter contracts, is taken out and slid though the hole of the hub (Figure 2).



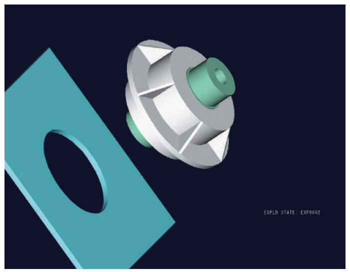


Figure 2 Trunnion slid through the hub after contracting

When the trunnion heats up, it expands and creates an interference fit with the hub. In 1995, on one of the bridges in Florida, this assembly procedure did not work as designed. Before

the trunnion could be inserted fully into the hub, the trunnion got stuck. So a new trunnion and hub had to be ordered worth $50,000. Coupled with construction delays, the total loss ran into more than hundred thousand dollars.

Why did the trunnion get stuck? This was because the trunnion had not contracted enough to slide through the hole.

Now the same designer is working on making the fulcrum for another bascule bridge. Can you help him so that he does not make the same mistake?

For this new bridge, he needs to fit a hollow trunnion of outside diameter 12.363" in a hub of inner diameter 12.358". His plan is to put the trunnion in dry ice/alcohol mixture (temperature of dry ice/alcohol mixture is $-108°F$) to contract the trunnion so that it can be slid through the hole of the hub. To slide the trunnion without sticking, he has also specified a diametral clearance of at least 0.01". Assume the room temperature is 80°F, is immersing it in dry-ice/alcohol mixture a correct decision?

Solution

Looking at the records of the designer for the previous bridge where the trunnion got stuck in the hub, it was found that he used the thermal expansion coefficient at room temperature to calculate the contraction in the trunnion diameter. In that case the reduction, ΔD in the outer diameter of the trunnion is

$$\Delta D = D\alpha\Delta T \tag{1}$$

where

D = outer diameter of the trunnion,

α = coefficient of thermal expansion coefficient at room temperature,

ΔT = change in temperature.

Given

$$D = 12.363"$$

$$\alpha = 6.817\times10^{-6}\ \text{in/in/°F at 80°F}$$

$$\begin{aligned}\Delta T &= T_{fluid} - T_{room}\\ &= -108-80\\ &= -188°F\end{aligned}$$

where

T_{fluid} = temperature of dry-ice/alcohol mixture

T_{room} = room temperature

the reduction in the trunnion outer diameter is given by

$$\begin{aligned}\Delta D &= 12.363\times\left(6.47\times10^{-6}\right)(-188)\\ &= -0.01504"\end{aligned}$$

So the trunnion is predicted to reduce in diameter by 0.01504". But, is this enough reduction in diameter? As per the specifications, he needs the trunnion to contract by

= trunnion outside diameter - hub inner diameter + diametric clearance

= 12.363" − 12.358" + 0.01"

= 0.015"

So according to his calculations, it is enough to put the steel trunnion in dry-ice/alcohol mixture to get the desired contraction of 0.015" as he is predicting a contraction of 0.01504".

But as shown in the graph below, the thermal expansion coefficient of steel decreases with temperature and is not constant over the range of temperature the trunnion goes through. Hence the above formula (Equation 1) would overestimate the thermal contraction. This is the mistake he made in the calculations for the earlier bridge.

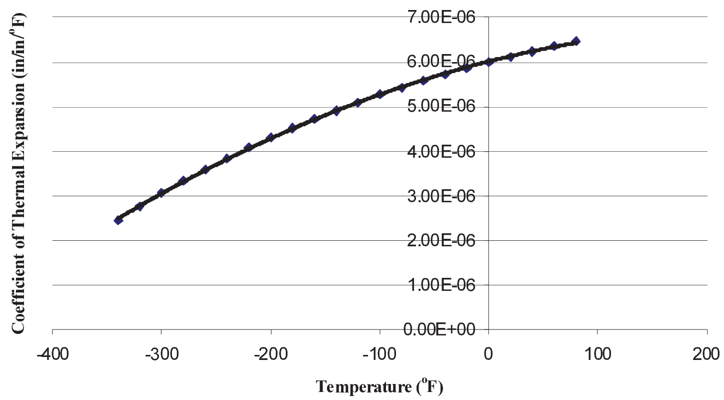


Figure 3 Varying thermal expansion coefficient as a function of temperature for cast steel.

To get a better estimate of the contraction in the diameter, we can use the thermal expansion coefficient at the average temperature. The average temperature of the steel would be

$$T_{avg} = \frac{-108+80}{2} \tag{2}$$
$$= -14^o F$$

Now given the table of thermal expansion coefficient as a function of temperature as given below, we can use polynomial interpolation to find the thermal expansion coefficient at the average temperature of $-14^0 F$ and find the contraction using equation (1).

Table 1 Temperature vs thermal expansion coefficient

Temperature (^{0}F)	Thermal Expansion Coefficient (μin/in/^{0}F)
80	6.47
60	6.36
40	6.24
20	6.12
0	6.00
-20	5.86
-40	5.72
-60	5.58
-80	5.43
-100	5.28
-120	5.09
-140	4.91
-160	4.72
-180	4.52
-200	4.30
-220	4.08
-240	3.83
-260	3.58
-280	3.33
-300	3.07
-320	2.76
-340	2.45

Is cooling in dry-ice/alcohol mixture still your recommendation?

Topic	INTERPOLATION
Sub Topic	Physical Problem
Summary	Find the thermal expansion coefficient of steel at a specific temperature to find out whether a steel shaft will cool down enough to shrink fit into a hollow hub. The thermal expansion coefficient is to be found by using interpolation from a given table of thermal expansion coefficient of steel as a function of temperature.
Authors	Autar Kaw
Last Revised	December 23, 2009
Web Site	http://numericalmethods.eng.usf.edu