Übung 9

Regression Teil A

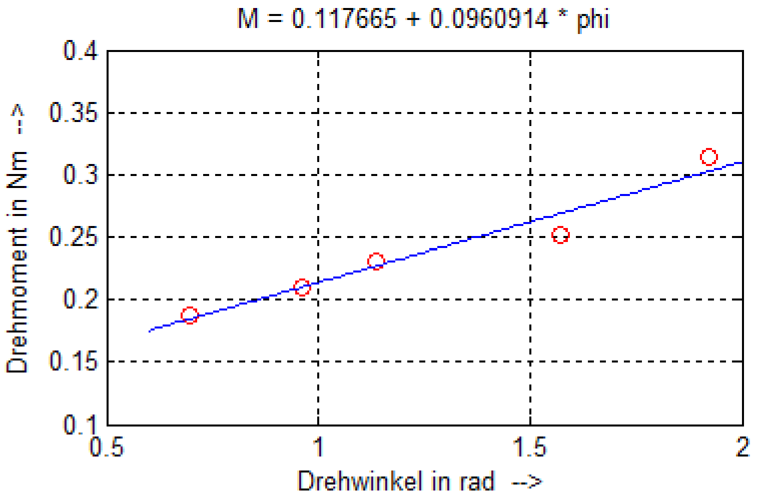
Benötigt: -
Befehle: sprintf, legend(...,'Location')

Aufgabe 1: Auslenkung einer Spiralfeder

Gegeben ist das Drehmoment einer Spiralfeder als Funktion der Auslenkung aus einer Messreihe:

M in Nm	0.188224	0.209138	0.230052	0.250965	0.313707
φ in rad	0.698132	0.959931	1.134464	1.570796	1.919862

- öffne neues Skript „spiralfeder.m"
- erstelle ein Diagramm $M=f(\varphi)$ mit den Messwerten als rote Kreissymbole
- ermittle durch Regression die Koeffizienten einer Gerade, die den Zusammenhang der Messwerte möglichst gut beschreibt
- mit den ermittelten Koeffizienten berechne man die Funktionswerte y der Gerade für x-Werte im Bereich (0,6 … 2,0) und stelle diese als durchgezogene Kurve in dem bereits vorhandenen Diagramm dar
- neben ordentlichen Achsenbeschriftungen ist im Diagrammtitel die gefundene Geradengleichung anzugeben



Aufgabe 2: Elastizitätsmodul eines Verbundwerkstoffes

Gegeben ist das Spannungs-Dehnungs-Diagramm eines Verbundwerkstoffes mit der mechanischen Spannung σ und der Dehnung ϵ .

Das Elastizitätsmodul $E=\sigma/\epsilon$ in Pa=N/m^2 entspricht dabei der Steigung des Spannungs-Dehnungs-Diagramms.

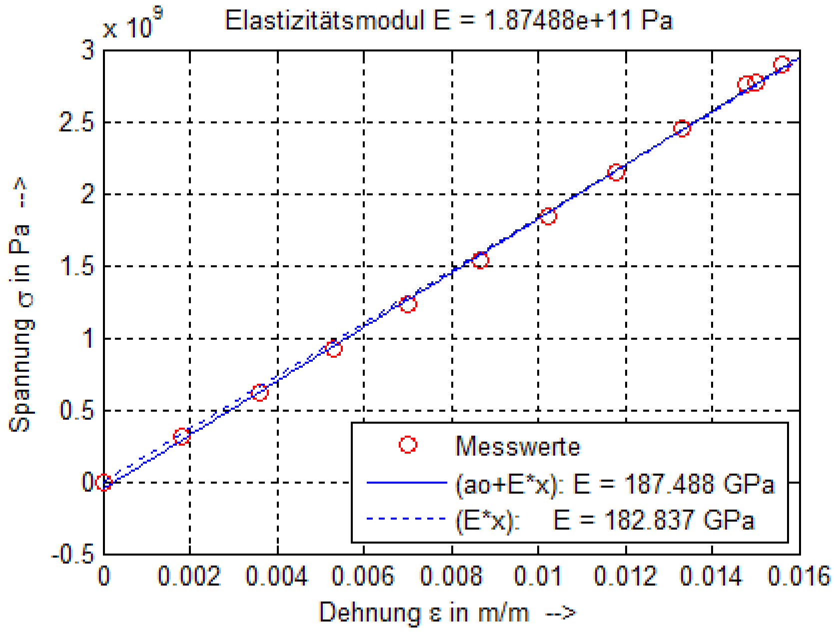
σ in MPa	0	306	612	917	1223	1529
ϵ in m/m	0	0.00183	0.00360	0.005324	0.00702	0.00867

σ in MPa	1835	2140	2446	2752	2767	2896
ϵ in m/m	0.010244	0.011774	0.01329	0.01479	0.015	0.0156

- öffne neues Skript „elastizitaetsmodul.m"
- erstelle ein Diagramm $\sigma=f(\epsilon)$ mit den Messwerten als rote Kreissymbole
- ermittle durch Regression die Koeffizienten einer Gerade, die den Zusammenhang der Messwerte möglichst gut beschreibt

- mit den ermittelten Koeffizienten berechne man die Funktionswerte y der Gerade für x-Werte im Bereich (0,0 … 0,016) und stelle diese als durchgezogene Kurve in dem bereits vorhandenen Diagramm dar
- neben ordentlichen Achsenbeschriftungen ist im Diagrammtitel der gefundene Wert für das Elastizitätsmodul anzugeben

- betrachtet man das Diagramm, so erkennt man, dass die gefundene Gerade nicht durch den Ursprung geht, d.h. zur Verbesserung suchen wir eine Ursprungsgerade mittels Regression deren Steigung dem Elastizitätsmodule entspricht
- setzen sie daher die Gleichung y = E*x derart an, dass sie alle Messpunkte erfüllt. Das so entstehende überbestimmte Gleichungssystem Ax=b ist mit x=A\b regressiv zu lösen
- mit der ermittelten Steigung zeichne man die Gerade in das vorhandene Diagramm als punktierte Linie ein
- für die Legende gebe man einmal „Messwerte“ an und für die beiden anderen Kurven den jeweiligen Wert des Elastizitätsmoduls



Grundlagen - Regression

Auszug aus: Billmann, L.: Systemtheorie. 1st Edition ISBN 978-1-291-46832-8,
Lulu Press Morrisville USA, 2013

0.1. Approximation von Signalen durch Regression

Ausgangspunkt einer *Kurvenanpassung* durch *Regression* sind endlich viele Stützstellen in einem Intervall [a, b], die entweder durch ermittelte Signale (Messungen) oder durch berechnete (bekannte) Funktionswerte gegeben sind. Die Aufgabe der Kurvenanpassung besteht nun darin, eine Ausgleichsfunktion derart zu ermitteln, dass die Abstände dieser Funktion zu den Stützstellen möglichst klein sind, wie in der Abbildung schematisch angedeutet ist.

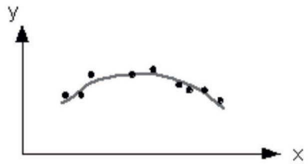


Abbildung 0.1.1: Prinzip für eine Kurvenanpassung mit Regression.

Welche Form von empirischer Funktion hinter den Stützwerten steht oder angenommen werden soll, ist dabei grundsätzlich freigestellt. Es haben sich jedoch, unter Gesichtspunkten der Lösungsfindung, insbesondere Polynome für aperiodische und die Superposition harmonischer Schwingungen (vgl. Fourier) für periodische Zusammenhänge durchgesetzt.

0.1.1 Methode der kleinsten Fehlerquadrate

Bezüglich der Lösungsfindung hat sich eindeutig die Gauss'sche[1] Methode der kleinsten Fehlerquadrate, die nach dem englischen Sprachgebrauch „least squares" auch als *LS-Methode* bezeichnet wird, durchgesetzt.

Die LS-Methode sieht vor, aus den bekannten Stützwerten

$$y_i = f(x_i) \ , \quad i = 0,1,\dots,N$$

die unbekannte empirische Funktion y=f(x) durch eine Approximationsfunktion mit n+1 freien Parametern $a_0, \dots, a_n$

$$\tilde{y} = \tilde{f}(x, a_0, \dots, a_n) \tag{0.1.1}$$

derart anzunähern, dass die Summe der quadratischen Abweichungen zwischen den bekannten Stützwerten und den approximierten Werten minimal wird.

$$\begin{aligned} e(a_0,\dots,a_n) &= \sum_{i=0}^{N}\left[\tilde{f}(x_i, a_0,\dots,a_n) - f(x_i)\right]^2 \\ &= \sum_{i=0}^{N}\left[\tilde{f}(x_i, a_0,\dots,a_n) - y_i\right]^2 = Min \end{aligned} \tag{0.1.2}$$

Die Parameter $a_0, a_1, \dots, a_n$ lassen sich finden, wenn Gl. (0.1.1) nach allen Parametern stetig differenzierbar ist und die Ableitung des Fehlers e in Gl. (0.1.2) nach den Parametern zu Null wird

$$\begin{aligned} &\frac{\partial e(a_0,\dots,a_n)}{\partial a_k} = 0 = \\ &2\sum_{i=0}^{N}\left[\tilde{f}(x_i, a_0,\dots,a_n) - y_i\right]\frac{\partial \tilde{f}(x_i, a_0,\dots,a_n)}{\partial a_k} = 0 \ , \quad k = 0,1,\dots,n \end{aligned} \tag{0.1.3}$$

Dies ist im allgemeinen ein nichtlineares Gleichungssystem zur Bestimmung der Parameter a_i. Erhalten wir ein lineares Gleichungssystem, was zu lösen erheblich einfacher ist, so sagt man die Approximationsfunktion ist linear in den Parametern und damit für das LS-Verfahren geeignet.

Ist die Anzahl der Stützstellen **N = n**, so hat man gerade ausreichend Gleichungen zur Bestimmung der Parameter und erhält die gleichen Ergebnisse wie bei einer **Interpolation**. Ist **N > n**, so erhält man ein über-bestimmtes Gleichungssystem, deren Lösung wir dann als ***Regression*** bezeichnen. Sind die Stützwerte y_i zunehmend gestört, so sollte deren Anzahl N wesentlich größer gewählt werden, um diese Fehler genügend stark zu mindern.

0.1.2 LS für aperiodische Funktionen mit Polynomen

Betrachten wir zunächst den Fall für **aperiodische Funktionen**, die wir durch Polynome beschreiben wollen, so ergeben sich mit der Approximationsfunktion

$$\tilde{y} = \tilde{f}(x, a_0,\dots,a_n) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \tag{0.1.4}$$

die Parameter aus dem linearen Gleichungssystem

1) Karl Friedrich Gauss (1736-1813), deutscher Mathematiker, der um 1801 die Methode der kleinsten Fehlerquadrate zur Bestimmung der Umlaufbahnen von Asteroiden entwickelte, aber erst viel später publizierte.

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{N} x_i^0 & \cdots & \sum_{i=0}^{N} x_i^n \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=0}^{N} x_i^n & \cdots & \sum_{i=0}^{N} x_i^{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{N} y_i x_i^0 \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{N} y_i x_i^n \end{bmatrix} \tag{0.1.5}$$

Zur Erprobung nehmen wir das Beispiel einer empirischen Funktion, die durch 8 Stützwerte

x_i	0.0	0.2	0.4	0.5	0.6	0.7	0.9	1.0
y_i	4.2	4.0	3.8	3.5	3.2	2.3	1.5	0.2

beschrieben ist und mit Hilfe der *LS-Methode* Polynome unterschiedlicher Ordnung als *Regressionskurven* bestimmt werden sollen.

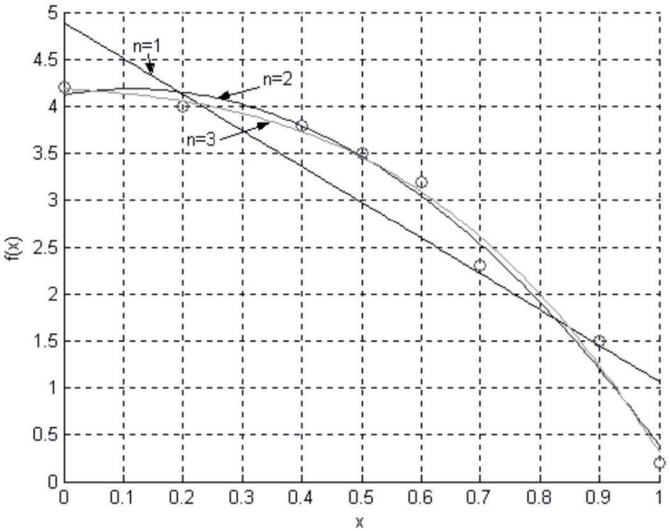


Abbildung 0.1.2: LS-Regression mit Polynomen unterschiedlicher Ordnung n.

Man erkennt, dass der Charakter des Datensatzes schon mit Ordnung 2 recht gut beschrieben werden kann und wir der klassischen Ausgleichskurve via Augen doch recht nahe kommen.

Praxis
Da die Regression von Signalen oder Stützwerten durch Polynome eine übliche Aufgabenstel-

lung ist, ist sie in MATLAB mit dem „polyfit“-Befehl natürlich bereits implementiert.
Nehmen wir als Beispiel die Stützpunkte wie zuvor, so erhalten wir die Koeffizienten der Polynoms 1. und 2. Ordnung zu

```
>> xd = [0.0 0.2 0.4 0.5 0.6 0.7 0.9 1.0];
>> yd = [4.2 4.0 3.8 3.5 3.2 2.3 1.5 0.2];
>>
>> polyfit(xd,yd,1)
ans =
   -3.8200    4.8908
>> polyfit(xd,yd,2)
ans =
   -4.8646    1.1336    4.1193
>>
```

Natürlich sind die erzielten Ergebnisse die gleichen, da es sich ja um eine eindeutige Aufgabenstellung handelt.
Wollen wir die interpolierten Werte für verschiedene x-Werte ermitteln, so bietet MATLAB dazu mit dem „polyval“-Befehl das geeignete Mittel.

```
>> polyval(polyfit(xd,yd,2),0:.2:1)
ans =
    4.1193    4.1514    3.7944    3.0482    1.9128    0.3883
>>
```

Haben wir N Stützwerte, so können wir festhalten, dass der „polyfit“-Befehl für die Polynomordnung n = N-1 eine Interpolation bestimmt und für Ordnungen n < N-1 eine LS-Regression durchführt.